Ahnung von Linearen Hüllen

Was bedeuten sie???

Datei Nr. 61103

Stand 22. Juli 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

1 Erzeugung von Vektoren durch Linearkombinationen

Man kann Vektoren addieren, subtrahieren und mit Zahlen multiplizieren:

Aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kann man bilden:

Vielfache: $5\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $4\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

eine Summe: $\vec{x}_1 = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

eine Differenz: $\vec{x}_2 = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Linearkombinationen: $\vec{x}_3 = 5\vec{a} + 4\vec{b} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_4 = \vec{a} - 6\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_5 = \tfrac{3}{2}\vec{a} + \tfrac{2}{3}\vec{b} = \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{17}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

usw.

Man kann aus zwei Vektoren unendlich viele Linearkombinationen bilden.

Die Menge aller Linearkombination kann man so schreiben: $U = \left\{ \vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$

oder ganz kurz mit einer eckigen Klammern: $U = \left[\vec{a}\,;\vec{b} \right]$

Man nennt diese Menge U die **lineare Hülle der Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Man kann natürlich die lineare Hülle von beliebig vielen „erzeugenden" Vektoren bilden.
Allgemein ist:

$$\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \right] = \left\{ \vec{x} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_n\vec{a}_n \mid r_i \in \mathbb{R} \right\}$$

die lineare Hülle der n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Die lineare Hülle eines einzigen Vektors ist die Menge seiner Vielfachen: $\left[\vec{u} \right] = \left\{ \vec{x} = k \cdot \vec{u} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$

2 Vektoren aus linearen Hüllen

a) Gegeben sind $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gehört $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$?

Wenn ja, muss $\vec{x}$ eine Linearkombination von $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sein.

Das kann man durch diesen Ansatz überprüfen:

$$\vec{x} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$$

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem geschrieben: $\begin{Bmatrix} 8 = r + 2s \\ -3 = -3r + s \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Man kann dieses Gleichungssystem z. B. durch das Additionsverfahren lösen.

Dabei eliminiere ich zuerst r

durch $3\cdot(1) + (2)$: $21 = 7s \Rightarrow s = 3$

Einsetzen in (1): $8 = r + 2\cdot\boxed{3} \Rightarrow r = 8 - 6 = 2$

Ergebnis: $\boxed{\vec{x} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2}$ Also ist $\vec{x} \in [\vec{a}_1 ; \vec{a}_2]$.

(2) Gegeben sind $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gehört $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ zu $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$?

Ansatz: $\vec{x} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r + 2s = 8 \\ -3r + s = -2 \\ 4r = 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

Aus (3) folgt $r = 2$

Aus (2) folgt: $s = 3r - 2 = 4$

Man muss nun in (1) eine Probe machen: $2 + 8 = 8$ ist eine falsche Aussage.

Also ist $\vec{x}$ nicht durch $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ kombinierbar: $\vec{x} \notin [\vec{a}_1 , \vec{a}_2]$.

(3) Gegeben sind $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gehört $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$ zu $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$?

Ansatz: $\vec{y} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r + 2s = 0 \\ -3r + s = 7 \\ 4r = -8 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

Aus (3) folgt $r = -2$

Aus (2) folgt: $s = 3r + 7 = 1$

Man muss nun in (1) eine Probe machen: $-2 + 2\cdot 1 = 0$ ist eine wahre Aussage.

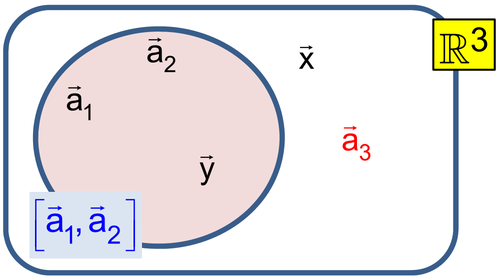
Also gilt: $\vec{y} = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, d. h. $\vec{y} \in [\vec{a}_1 , \vec{a}_2]$.

Nun wollen wir unsere Ergebnisse überdenken.

In den Beispielen (2) und (3 wurde die lineare Hülle $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ untersucht.

Wir fanden heraus, dass der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ nicht dazu gehört, wohl aber $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Das ist nun ganz einfach zu erklären.



Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist dreidimensional.
Das heißt, dass man drei linear unabhängige Vektoren (die Basisvektoren) benötigt, um jeden Vektor des $\mathbb{R}^3$ durch sie zu kombinieren.

Verwendet man nur zwei Vektoren, etwa $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$, dann erzeugt man nur eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

Wir sahen, dass $\vec{y} \in [\vec{a}_1 ; \vec{a}_2]$ und $\vec{x} \notin [\vec{a}_1 ; \vec{a}_2]$ gilt.

Verwendet man dagegen drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, dann kann man damit jeden Vektor kombinieren. Denn dann ist $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \mathbb{R}^3$

Dies ist in Beispiel (4) der Fall:

(4) Gegeben sind $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gehört $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ zu $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$?

Das sind genau die Vektoren aus (2), vermehrt um $\vec{a}_3$:

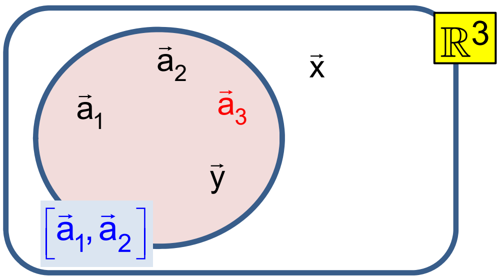
Ansatz: $\vec{x} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 + t\vec{a}_3$

Mit Zahlen:
$$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r + 2s + 4t = 8 \\ -3r + s \quad + t = -2 \\ 4r \qquad\quad + t = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2)' \\ (3) \end{array}$$

Egal, wie man dieses Gleichungssystem löst, man erhält: $r = 4$, $s = 18$ und $t = -8$.

Also kann man $\vec{x}$ so darstellen: $\vec{x} = 4\vec{a}_1 + 18\vec{a}_2 - 8\vec{a}_3$.

Nun gibt es noch einen interessanten Fall:



Wenn der dritte Vektor $\vec{a}_3$ zu $[\vec{a}_1 , \vec{a}_2]$ gehört,

dann kann man voraussagen, was passieren wird:

$\vec{x} \notin [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ aber $\vec{y} \in [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$,

wobei noch etwas Interessantes passieren wird.

Schauen wir uns diese Rechnungen an.

(5) Ich berechne mit zuerst einen Vektor $\vec{a}_3 \in [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, z. B. durch $\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2$:

$$\vec{a}_3 = 3\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-14\\12\end{pmatrix}.$$

Ich möchte nun feststellen, ob jetzt $\vec{x} \in [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ gilt.

Ansatz: $\vec{x} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 + t\vec{a}_3$

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix}8\\-2\\8\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-7\\-14\\12\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} r + 2s - 7t = 8 & (1)\\ -3r + s - 14t = -2 & (2)'\\ 4r \quad + 12t = 8 & (3)\end{array}\right.$

Hier die Lösung mit dem Additionsverfahren:

Zuerst dividiere ich (3) durch 4: $r + 3t = 2$ (4)

Nun eliminiere ich s durch $(1) - 2\cdot(2)$: $7r + 21t = 12$ | :7

$r + 3t = \frac{12}{7}$ (5)

Jetzt folgt der Widerspruch durch: $(4) - (5)$: $0 = \frac{2}{7}$.

Also führt unser Ansatz zu keiner Lösung: Es ist $\vec{x} \notin [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$.

Im „Ernstfall" wird man aber nicht wissen, wie $\vec{a}_3$ entstanden ist, sondern man kennt einfach drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ des $\mathbb{R}^3$ und versucht $\vec{x}$ aus ihnen zu kombinieren.

Wenn man dann wie hier auf einen Widerspruch stößt, dann muss klar sein, dass diese drei Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, denn sonst wäre jeder Vektor kombinierbar.
Also sind diese drei Vektoren linear abhängig, und es ist z. B. $\vec{a}_3 \in [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$.

(6) Nun noch die Überraschung.

Wir verwenden wie in (5) die drei linear abhängigen Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix}-7\\-14\\12\end{pmatrix}$

die ja (wie wir jetzt wissen) alle der linearen Hülle $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ angehören.

Und ich möchte jetzt den ebenfalls aus $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ stammenden Vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\7\\-8\end{pmatrix}$ durch diese

drei Vektoren darstellen. Es geht also darum:

Wie kann ich einen Vektor durch drei abhängige Vektoren darstellen?

Ansatz: $\vec{x} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 + t\vec{a}_3$

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} r + 2s - 7t = 0 \\ -3r + s - 14t = 7 \\ 4r \quad + 12t = -8 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

Hier die Lösung mit dem Additionsverfahren:

Zuerst dividiere ich (3) durch 4: $r + 3t = -2$ (4)

Nun eliminiere ich s durch $(1) - 2\cdot(2)$: $7r + 21t = -14$ | :7

$r + 3t = -2$ (5)

Die Gleichung (4) und (5) sind identische Bedingungen, also fehlt im Grunde eine Bedingung. Daher ist eine Variable beliebig wählbar: es gibt also unendlich viele Lösungen.

Ich wähle $t = p \in \mathbb{R}$, dann folgt aus (4): $r = -2 - 3p$

und aus (2): $s = 7 + 3r + 14t = 7 + 3(-2 - 3p) + 14p = 1 + 5p$

Und so bekommt man die Linearkombination:

$$\vec{x} = (-2 - 3p)\vec{a}_1 + (1 + 5p)\vec{a}_2 + p\vec{a}_3$$

Für jedes $p \in \mathbb{R}$ gibt das eine andere Linearkombination !!!!

Z. B. $p = 0$: $\vec{x} = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ (was wir ja schon kennen)

$p = 1$: $\vec{x} = -5\vec{a}_1 + 6\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

$p = -1$: $\vec{x} = \vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 - \vec{a}_3$

usw.

Dafür gibt es übrigens noch eine sehr einleuchtende Begründung:

Wir gehen von der Kombination aus: $\vec{x} = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ (A)

Und dann bilde ich einen neuen Vektor $\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2$.

Diese Gleichung stelle ich um: $\vec{o} = 3\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3$. (B)

Wenn ich jetzt Gleichung (B) zu (A) addiere, erhalte ich:

$$\vec{x} + \vec{o} = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + (3\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3)$$

zusammengefasst: $\vec{x} = \vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 - \vec{a}_3$

(Die ist oben für p = - 1 entstanden.

Nun kann ich den Nullvektor in Form von (B) beliebig oft addieren. Jedes Mal erhalte ich eine neue Kombination für $\vec{x}$.

Man erkennt: Kombiniert man einen Vektor durch linear abhängige Vektoren, dann geht das auf unendlich viele Arten.

3 Zusatz

Hier einige Besonderheiten von linearen Hüllen

(1) Wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind (also eine Basis), dann ist

$\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right] = \mathbb{R}^3$

(2) Wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und $\vec{a}_4 \in \mathbb{R}^3$, dann ist $\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\right] = \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right] = \mathbb{R}^3$

Denn dann sind diese vier Vektoren linear abhängig. Man kann $\vec{a}_4$ selbst als Linearkombination der Basis darstellen und ersetzen:

Es sei $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4$ mit $\vec{a}_4 = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + r_3\vec{a}_3$

dann ist $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\left(r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + r_3\vec{a}_3\right)$

also $\vec{x} = \left(x_1 + r_1x_4\right)\vec{a}_1 + \left(x_2 + r_2x_4\right)\vec{a}_2 + \left(x_3 + r_3\vec{a}_4\right)\vec{a}_3 \in \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right]$

(3) Wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind und etwa $\vec{a}_3 = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$ ist,

dann ist $\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right] = \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2\right]$, denn man kann ähnlich wie in (3) $\vec{a}_3$ ersetzen.

(4) Die lineare Hülle eines einzigen Vektors ist die Menge seiner Vielfachen.

Im Text 61110 „Untervektorräume“

wird besprochen, dass eine lineare Hülle für sich wieder ein eigener Vektorraum ist. Das wird schnell klar, weil Summe und Vielfache von Vektoren aus einer linearen Hülle selbst wieder Elemente dieser linearen Hülle sind.

Außerdem wird gezeigt, was lineare Hüllen und homogene lineare Gleichungssysteme verbindet:
Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist eine lineare Hülle.
Und umgekehrt: Man kann zu jeder lineare Hülle ein homogenes lineares Gleichungssystem angeben, dessen Lösungsmenge es ist. (Siehe Text 61110 Seite 11 und 18).

Und auf Seite 19 kann man nachlesen, wie man die Schnittmenge zweier linearen Hüllen bestimmt.